

Математическая модель и параллельный алгоритм для решения задачи фильтрации газа в пористых средах

Н. М. Курбонов, email: nozim_kurbonov@mail.ru

Ташкентский университет информационных технологий
имени Мухаммада аль-Хоразмий

Аннотация. В работе приведена трехмерная математическая модель и параллельный вычислительный алгоритм для решения задачи фильтрации газа в пористых средах при произвольных области. Для решения задачи разработан параллельный вычислительный алгоритм, основанный на конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений и последующем решении систем алгебраических уравнений.

Ключевые слова: Математическая модель, численный метод, параллельный вычислительный алгоритм, фильтрация, газ, пористая среда, вычислительная нагрузка.

Введение

В ходе численного интегрирования задач массопереноса в пористых средах, описывающихся с помощью систем многомерных уравнений в частных производных с сосредоточенными и распределенными параметрами, приходится сталкиваться с необходимостью решения трех- или пятидиагональных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокого порядка с одной и той же матрицей коэффициентов, но различными правыми частями.

При этом в зависимости от области фильтрации субстанции и шага интегрирования по пространственным переменным порядок формирующихся матриц может варьироваться от сотен до миллионов. В случае большой размерности системы решение таких задач закономерно требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому проблема разработки эффективных параллельных вычислительных алгоритмов для решения задач массопереноса в пористых средах не теряет своей актуальности [1,6,8].

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерную математическую модель фильтрации газа в пористой среде. Основное уравнение имеет следующий вид [2-5,7,9,16]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} b \rho \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{\mu} b \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_z}{\mu} b \rho \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (m \rho) \tilde{b} \pm F_Q, \quad (1)$$

где

$$F_Q = \frac{Q P_{at}}{\Delta z \Delta x \Delta y} \cdot \frac{2 \mu}{b \cdot K} \delta(x, y, z), \quad \delta(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y, z) \in \gamma_v; \\ 0 & \text{при } (x, y, z) \notin \gamma_v. \end{cases}$$

Здесь Q – объемный расход (при атмосферном давлении) на скважинах; $Q \rho$ – массовый расход; P – давление; P_{at} – атмосферное давление; ρ – плотность; b – мощность пласта; \tilde{b} – среднее значение мощности в сеточном квадрате; $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – шаги по координатам x, y и z соответственно; m – пористость пласта; K, μ – соответственно коэффициент фильтрации и вязкости газа; $K_z = f(m, g)$; γ_v – множество точек области G , в которых могут присутствовать скважины.

К уравнению (1) добавляем начальные, граничные, а также внутренние условия:

$$P(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = P_n; \quad \oint \frac{K}{\mu} b \cdot \frac{\partial P}{\partial n} ds = c Q_v; \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0. \quad (3)$$

2. Метод решения

Как следует из постановки задачи (1)-(3), получить ее решение в аналитической форме затруднительно.

Поэтому, в данной работе предлагается эффективный метод конечно-разностной аппроксимации решения задачи, основанный на применении неявной конечно-разностной консервативной схемы [1-17]. Тем самым исходная задача (1)-(3) сводится к системе алгебраических уравнений, решая которую, определяем газодинамические параметры объекта.

Для этого вводим сетку по x, y, z и, используя схему продольно-поперечных направлений по осям Ox, Oy, Oz , линеаризуем нелинейные члены, получая в итоге трехдиагональные квадратные матрицы размерностью $N_x * N_y * N_z$ следующего вида

$$A_1 x = b_1, \quad A_2 x = b_2, \quad A_3 x = b_3$$

Здесь b_1 – вектор размерностью N_x , b_2 – вектор размерностью N_y , b_3 – вектор размерностью N_z [1,6,8].

Программная реализация рассмотренного алгоритма, как и в большинстве случаев нетривиальных задач, является попеременно последовательно-параллельной. На уровне кода программы распараллеливанию подвергается наиболее ресурсоёмкий участок, то есть решение системы алгебраических уравнений.

Исходная матрица A распределяется по p процессорам циклическими горизонтальными полосами с шириной полосы в одну строку. Такая строчно-циклическая схема подразумевает изменение на единицу номера процесса при переходе от строки к следующей строке. Применение данной схемы решает проблему балансировки вычислительной нагрузки и простоев процессоров, как это происходит при последовательно-строчной схеме, когда при одинаковом распределении строк каждая последующая итерация увеличивает число простаивающих процессоров.

Для операций над элементами матрицы A она трансформируется в одномерный массив, что связано с особенностями среды выполнения Java. Положение строк в одномерном массиве определяется с помощью набора значений смещения с интервалом равным количеству элементов в строке - n .

Параллельный алгоритм решения системы линейных уравнений методом прогонки состоит из двух этапов. На первом этапе выполняется исключение поддиагональных элементов матрицы (прямой ход). На втором этапе – исключение наддиагональных элементов, начиная с последнего (обратный ход). После этого получим значения неизвестных на границах полос разделения данных, а далее за один проход находим значения внутренних переменных.

Хотя рассматриваемый алгоритм предполагает оптимальную балансировку вычислительной нагрузки между узлами кластера, на общее время работы программы существенно влияют затраты времени на пересылку строк матрицы между процессами. Поэтому эффективность работы алгоритма проявляется при большой размерности матриц, т.е. когда время на пересылку данных становится менее значимым по сравнению со временем, потраченным, непосредственно, на вычисления.

Данное обстоятельство приводит к необходимости соблюдения компромисса между желаемыми показателями ускорения и эффективности, т.е. сохранять соответствие между объемом задачи и количеством задействованных узлов кластера. При необоснованном

увеличении числа процессов происходит замедление скорости вычислений. В нашем случае (матрица $100 \times 100 \times 100$) ускорение прекращается при $p > 8$, а при малых размерностях матрицы ускорения не происходит вообще, напротив, время вычислений увеличивается.

Заключение

Разработаны параллельный вычислительный алгоритм и программное обеспечение для решения задачи фильтрации газа в пористых средах при произвольной области фильтрации. Разработанный алгоритм и программное обеспечение обеспечивают значительное сокращение времени расчета по матрице с размерами $100 \times 100 \times 100$ на кластере, по сравнению с использованием обычного метода вычислений на персональном компьютере.

Список литературы

1. Курбонов Н.М., Ибрагимов К.А. Трехмерная модель и эффективный алгоритм параллельного вычисления задачи фильтрации газа в пористых средах // Информационные технологии моделирования и управления. – Воронеж, 2021. – № 2(124). – С. 96-106.
2. Kurbonov N., Ibragimova K. Numerical solution of the problem of gas filtration in porous media by the method of coordinate splitting // Journal of Mathematical and Computational Science. - 2021. - Vol. 11, Issue 6. - P. 7269-7286. - DOI: 10.28919/jmcs/5984.
3. Ravshanov N., Kurbonov N. M. Numerical simulation of gas filtration in a porous medium // Information technology modeling and management. – Voronezh, 2016. – № 1 (97). – Pp. 34-45.
4. Курбонов Н. Численное моделирование задачи фильтрации газа в пористых средах методом координатного расщепления // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2021. – №5(35). – С. 71-85.
5. Sadullaev R., Ravshanov N., Kurbonov N. M. Mathematical model and numerical algorithm for gas filtration in porous media // Bulletin of Tashkent State Technical University. – Tashkent, 2011. – № 3-4. – Pp. 3-8.
6. Ravshanov N., Mamatov N., Kurbonov N., Akhmedov D. Parallel computing algorithm for solving the problem of mass transfer in porous medium // European Applied Sciences. – 2013. – № 3. – Pp. 40-42.
7. Ravshanov N., Kurbonov N.M. Computational experiment for analysis of main parameters of the gas filtration process in porous medium // American Journal of Mathematical and Computational Sciences. - 2016. — № 1(1). — Pp. 29-36.

8. Kurbonov N.M., Ibragimova K.A. Parallel computational algorithm for solving gas filtration problems in porous media // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. – 2019. – Vol. 6, Issue 12. – Pp. 12129-12134

9. Kurbonov N.M. Computer model for study of gas filtration process in porous media // Uzbek journal “Problems of Informatics and Energy”. – Tashkent, 2018. – № 3. – Pp.20-29.

10. Ravshanov N., Kurbonov N., Mukhamadiev A. An Approximate Analytical Solution of the Problem of Fluid Filtration in the Multilayer Porous Medium // International Journal of Computational Methods. - 2016. — Vol. 13, № 6. — 1650042 [10 pages] .

11. Kurbonov N., Aminov S. Computer modeling of filtration processes with piston extrusion // Journal of Physics: Conference Series. - 2020. - Vol. 1441. - P. 012147. - DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012147

12. Kurbonov N., Ibragimova K. Numerical Modeling of the Filtration Process During Oil Displacement by Gas // International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering. - 2020. - Vol. 9, Issue 5. - P. 8526-8532. - DOI: 10.30534/ijatcse/2020/232952020.

13. Равшанов Н., Курбонов Н. Моделирование процесса фильтрации трехфазной смеси «нефть-газ-вода» в пористых средах // Технология материалов. - Москва : Изд-во ИНГН, 2013. - №. - С.3-13.

14. Курбонов Н.М., Аминов С.М. Численное моделирование процесса фильтрации жидкостей и газа в пористой среде // Информационные технологии моделирования и управления. – Воронеж, 2019. – № 3(117). – С. 196-206.

15. Курбонов Н.М., Ибрагимова К.А. Математическое моделирование задачи фильтрации газа в пористых средах методом координатного расщепления // Theoretical & Applied Science. – 2021. – № 3(95). – Pp. 395-400.

16. Равшанов Н., Курбонов Н.М. Численное моделирование процесса фильтрации газа в пористой среде // Информационные технологии моделирования и управления. – Воронеж, 2016. – № 1(97). – С. 34-45.

17. Курбонов Н. Численное моделирование задачи фильтрации газа в пористой среде при наличии массообмена сквозь границы // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2022. – №6(45). – С. 68-81.